干旱区地理
ARID LAND GEOGRAPHY

doi:10.12118/j.issn.1000－6060.2020.01.17

基于不同算法等高线曲率的提取与分析①

王　宁[1]，　姚志宏[2]

（1　西北大学城市与环境学院，陕西　西安　710127；　2　华北水利水电大学测绘与地理信息学院，河南　郑州　450045）

摘　要：等高线曲率是一个重要的地形属性，反应了地形表面在水平方向的凹凸性，表达了地表物质运动的发散和汇合模式。基于安塞县县南沟小流域的矢量等高线数据和DEM，分别利用圆拟合算法（相邻三点法、间隔三点法和最小二乘法）和曲面拟合模型（E模型、S模型和Z模型）提取等高线曲率，通过对实地地形的对比分析，结果表明：（1）在矢量等高线数据的计算结果中，三点拟合法计算结果相比最小二乘法结果差异大，对等高线曲率空间格局分布描述更准确；（2）最小二乘法计算的结果频数分布集中程度最高，两种三点拟合法计算结果频数曲线差别微小；（3）在栅格数字高程模型的计算结果中，基于S模型计算结果在空间格局上较E模型和Z模型的结果差别大，基于E模型的计算结果对等高线曲率描述效果更好。结果能准确说明采用不同算法计算等高线曲率的差别，对在实际数字地形分析中有重要的意义，可为等高线曲率计算提供重要参考。

关 键 词：数字地形分析；DEM；等高线曲率；圆拟合算法

地面曲率是对地形表面上一点扭曲变化程度的定量化度量因子[1]。等高线曲率是通过该点的等值面（水平面）与地表交线的曲率，等高线曲率表达了地表物质运动的汇合和发散模式[2]。与坡度、坡向等基本地形参数一样，等高线曲率在数学定义上是明确且唯一的，具有确定的表达式[3]。目前，对坡度、坡向和流域网络分析等的研究比较深入，而对等高线曲率等地形曲率的研究较少。基于栅格数据结构提取分析曲率，FLORINSKY[4]通过误差传播定律对常用的四种曲率模型进行了分析比较，通过计算在中心点处各个方向的偏导数来计算曲率的精度，给出了曲率误差和数字高程模型（DEM）误差的关系式。SCHMIDT[5]通过实验操作在光滑的数学曲面和实地DEM数据对3种曲率计算模型进行了研究。但FLORINSKY和SCHMIDT在探讨等高线曲率方面的研究较少，更缺少对矢量等高线的研究。而基于矢量数据结构提取分析曲率，张亮[6]提出圆拟合的方法，并没有进行详细对比不同拟合方式之间对结果的影响。基于上述原因，本研究利用不同算法提取等高线曲率并进行对比分析和评价，讨论设计新的基于矢量数据格式的等高线曲率计算方法，以期为DEM分辨率的确定提供科学依据，弥补前人研究的不足，且对推进数字地形分析的研究具有重要意义。

1　等高线曲率提取算法

1.1　基于矢量数据的等高线曲率算法

1.1.1　三点拟合法　如果三点不在一条直线上则可确定唯一的圆，中间节点处的曲率用半径的倒数表示；如果三点共线，则直接赋曲率值0[7]。

如图1所示为等高线的一部分，假设r为三点（P_{i-1}，P_i，P_{i+1}）构成的三角形外接圆半径，则半径的倒数$1/r$即可认为是在点P_i处的曲率[8]。根据海伦公式、正弦定理、三角形面积公式即可推导出等高线曲率计算公式：

$$C_c = 1/r = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{abc} \qquad (1)$$

式中：C_c表示节点P_i处的等高线曲率（rad·m^{-1}）；a，b和c分别表示线段$P_{i-1}P_i$，P_iP_{i+1}，$P_{i-1}P_{i+1}$的

①　**收稿日期：**2019－06－14；　**修订日期：**2019－09－11
基金项目：国家重点研发计划（2016YFC0402402）；水利部黄土高原水土流失过程与控制重点实验室开放课题（2016005）
作者简介：王宁（1994－），男，硕士研究生，研究方向为数字地形与流域水文分析. E-mail：ningwang24@163.com
通讯作者：姚志宏. E-mail：yaozhihong@ncwu.edu.cn

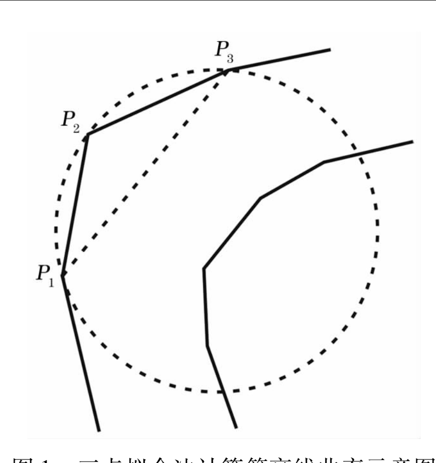


图 1　三点拟合法计算等高线曲率示意图

Fig. 1　Three-point fitting method for calculating contour curvature

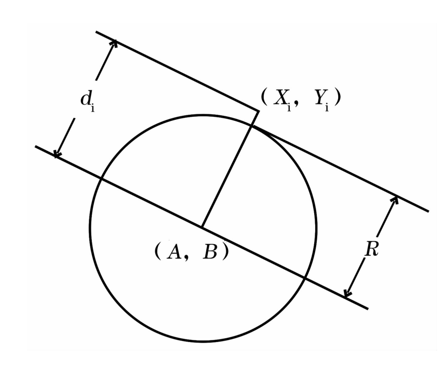


图 2　最小二乘法计算等高线曲率示意图

Fig. 2　Least squares method for calculating contour curvature

长度。

1.1.2　最小二乘法　最小二乘法是利用最小化误差的平方和寻找最佳拟合函数匹配该组数据。如图 2,样本集(X_i,Y_i) $i=(1,2,3\cdots N)$为等高线上一组节点,d_i 为样本集中点到圆心(A,B)的距离,R 为拟合圆的半径,取半径倒数 $1/R$ 即为在所选样本集中的等高线曲率。根据圆曲线方程、最小二乘法推求拟合圆半径,得到利用最小二乘法求得的等高线曲率公式为:

$$C_c = 1\Big/R = 2\Big/\sqrt{a^2+b^2-4c} \tag{2}$$

式中:$a=\dfrac{HD-EG}{CG-D^2}$, $b=\dfrac{HC-ED}{D^2-CG}$,

$$c=-\frac{\sum(X_i^2+Y_i^2)+a\sum X_i+b\sum Y_i}{N},$$

$$C=(N\sum X_i^2-\sum X_i\sum X_i),$$

$$D=(N\sum X_iY_i-\sum X_i\sum Y_i)$$

$$E=N\sum X_i^3+N\sum X_i\sum Y_i^2-\sum(X_i^2+Y_i^2)\sum X_i$$

$$G=(N\sum Y_i^2-\sum Y_i\sum Y_i),$$

$$H=N\sum X_i^2\sum Y_i+N\sum Y_i^3-\sum(X_i^2+Y_i^2)\sum Y_i$$

1.2　基于格网 DEM 的等高线曲率算法

曲率计算的实现主要包括对地形曲面求一阶导、二阶导和混合导,对于 DEM 数据曲率计算的实现,是利用局部曲面拟合或者对局部窗口进行差分计算求取[2,9-10]。

通过 3×3 局部窗口如图 3 中的各个高程点$(x_i,y_i,Z_i)(i=1,2,\cdots,n)$,为了求取各个偏导数,以最小二乘法来计算多项式中的系数,然后按照等高线曲率计算公式[11]

$$C_c=-\frac{q^2r-2pqs+p^2t}{(p^2+q^2)^{3/2}} \tag{3}$$

式中:$p=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $r=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

基于格网 DEM 提取等高线曲率,因为对地形曲面拟合所采取的方法不同,会导致计算的 5 个参数 p, q, r, s, t 的值有所不同,从而会使最终计算的等高线曲率值有所差别,本文主要探讨 3 种方法拟合地形曲面而对提取的等高线曲率产生的影响。3 种方法分别为二次曲面方法(EVANS[11]方法)、限制二次曲面方法(SHARY[12-13]方法)和不完全四次曲面方法(ZEVENBERGEN[14]方法)。

1.3　等高线曲率的算法实现

1.3.1　基于矢量数据的等高线曲率计算　本研究基于Net环境下的C#程序开发技术编写程序,提取

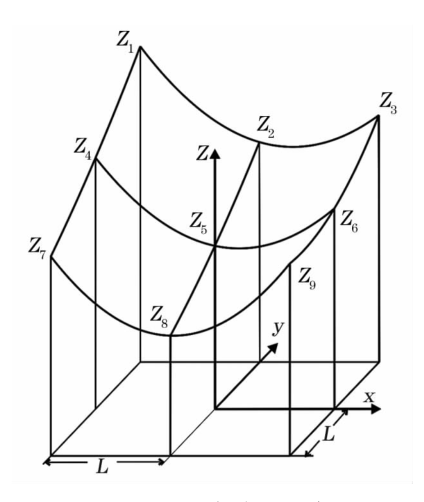


图 3　3×3 局部窗口示意图

Fig. 3　3×3 partial window diagram

等高线曲率。具体等高线曲率提取流程如图4,主要步骤为:(1) 对原始矢量等高线数据进行拓扑检查和错误修复,包括对等高线交叉、自相交、悬挂点等方面的错误修复。(2) 使用ArcMap中的Feature Vertices To Points工具将拓扑修复后的矢量等高线图层转换为点图层,利用Add XY Coordinates工具为等高线节点图层添加坐标。(3) 利用C#编写程序,以添加了节点坐标的点图层中的"ORIG_ID"字段(存储了节点所属等高线的索引号)为基础读入同一条等高线上节点的坐标数据,用上文推导的公式(1)和(2)分别计算等高线曲率并存储于点图层属性表的curvature字段中。(4) 对矢量点格式曲率结果进行空间分析,完成利用不同圆拟合算法基于矢量数据的等高线曲率的提取与分析。

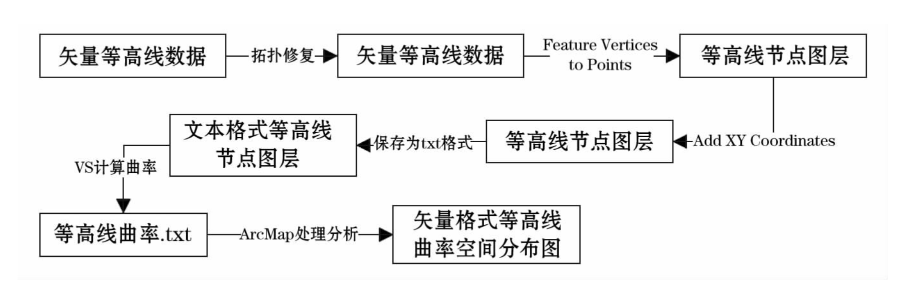


图4 基于矢量格式的等高线曲率提取流程图

Fig. 4 Flow chart of contour curvature extraction which base on vector data

1.3.2 基于格网DEM的等高线曲率计算 图5为基于格网DEM的等高线曲率提取流程图:(1) 在ArcMap中加载原始DEM数据,利用Toolbox中Raster to ASCII工具将原始DEM数据转化为文本格式的DEM文档。(2) 利用C#编程实现3种方法对等高线曲率的计算,得到文本格式的等高线曲率文档。(3) 将文本格式的曲率在ArcMap中利用转换工具ASCII to Raster转换成栅格格式曲率。(4) 对栅格格式曲率结果进行空间分析,完成利用不同算法基于DEM等高线曲率的提取与分析。

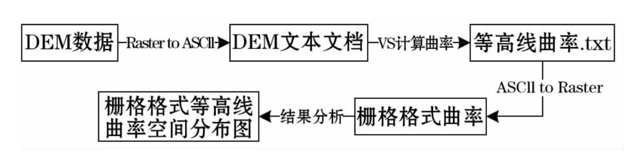


图5 基于DEM的等高线曲率提取数据流程图

Fig. 5 Flow chart of contour curvature extraction which base on DEM

2 试验区与基础数据

选择位于陕北安塞县县南沟流域的两个试验区的矢量等高线数据和利用ANUDEM软件插值生成的栅格DEM数据,如图6、7、8、9所示。该流域地处黄土丘陵沟壑区的第二副区、半干旱森林草原地区。该地区海拔1 070 ~ 1 429 m,地面相对起伏260 m,地面坡度≥30°达一半以上。该流域沟壑林立,地表破碎复杂,水土流失异常明显,适用于本研究对等高

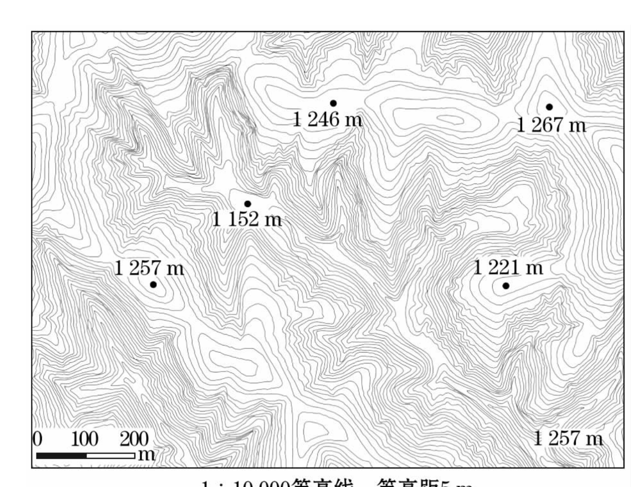


图6 样区1 矢量等高线数据

Fig. 6 Sample area 1 vector data

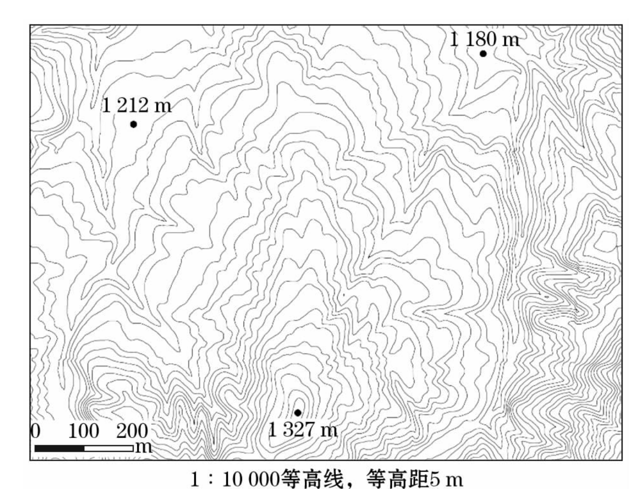
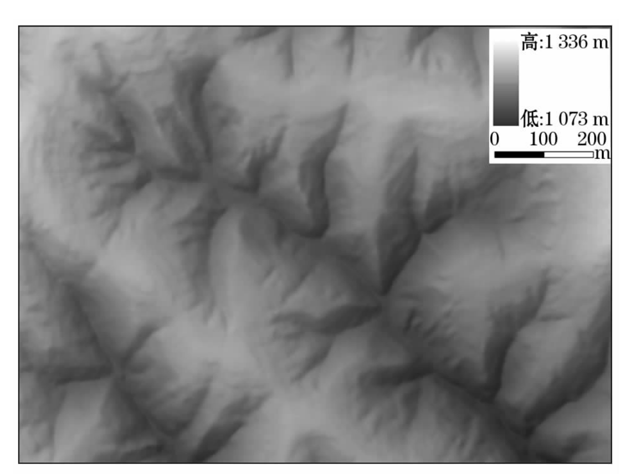


图7 样区2 矢量等高线数据

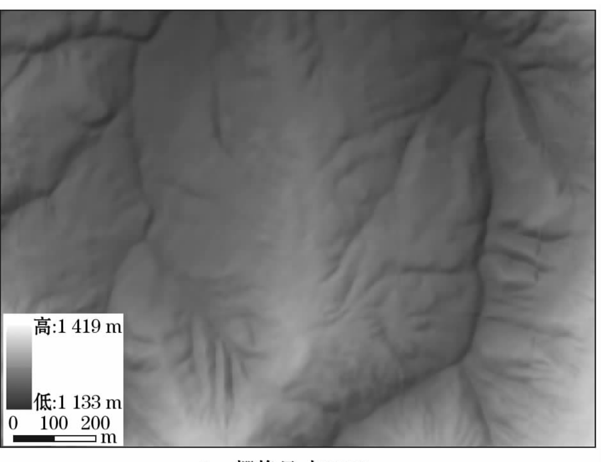
Fig. 7 Sample area 2 vector dData



2.5 m栅格尺寸DEM

图 8　样区 1 栅格 DEM 数据

Fig. 8　Sample area 1 DEM



5 m栅格尺寸DEM

图 9　样区 2 栅格 DEM 数据

Fig. 9　Sample area 9 DEM

线曲率的提取分析。

3　结果与分析

3.1　基于矢量等高线曲率结果分析

实验数据 1 选自图 6 县南沟流域的一部分，实验数据 2 选自图 7 另一块县南沟小流域的一部分，两部分选取的原则都是在地形变化较为复杂的地区，从而计算的等高线曲率值大小跨度范围相对大，分类效果较为明显，便于对不同算法计算结果的比较分析。实验 1,2 计算的等高线曲率结果如图 10,11。结果表明：利用三点拟合法计算的等高线曲率比利用最小二乘法计算的等高线曲率大，曲率在空间分布上存在着明显差异；同一种方法（三点拟合法）提取等高线曲率，选点方式不同，得出的等高线曲率在空间分布上差异不明显。在等高线比较弯曲，变化复杂的地区曲率大，而在等高线比较平直，变化较小的地区曲率小；在地形特征线山谷线和山脊线周围等高线曲率较大，而在非地形特征线的地区曲率较小，结果符合实地地形情况。

3.2　基于矢量等高线曲率结果统计分析

将两个地区的矢量点格式的等高线曲率值导入 Excel 进行频率统计，得到如图 12 不同方法拟合等高线曲率频率曲线。通过对图 12 等高线曲率频率曲线分析，结果表明：在 3 种拟合算法计算等高线曲率中，最小二乘法集中程度最高，相邻三点法和间隔三点法集中趋势差别微小；采用不同拟合算法对等高线曲率的计算，最小二乘法计算结果与三点法计算结果差别较大，结果值偏小，曲线表明该流域曲率值集中分布在区间(0,0.4)中。

对两个样区曲率值进行统计分析可见（表 1），样区 1 等高线曲率计算结果为相邻三点法与间隔三点法计算结果相差微小，样区 2 等高线曲率计算结果为相邻三点法与间隔三点法计算结果略有差别；在两个样区中，最小二乘法计算的结果明显偏小。

3.3　基于 DEM 等高线曲率结果分析

基于不同曲面拟合模型的样区 1,2 的等高线曲率计算结果（图 13、图 14）可以看出：

（1）基于 S 模型计算出的结果较基于 E 模型和 Z 模型计算的结果在空间格局上差别大，棱角分明；基于 E 模型计算的结果较基于 Z 模型计算的结果在地形特征线附近的曲率值差别更大，显示效果更清晰。

（2）在等高线曲率计算结果图上能够清晰地看到有关的地形特征线，并且地形特征线的分布与实地情形相符合，分布格局也合理；等高线曲率值在地形特征线山脊线或山谷线周边较大，并且越靠近山顶曲率值越大；曲率值的正负反映了地形的凹凸变化，对地形特征线的勾绘是正确的。

3.4　基于 DEM 等高线曲率结果统计分析

在 ArcMap 中利用属性分类工具对基于 3 种曲面拟合算法提取的等高线曲率结果进行分区统计分析发现：对于同一个样区，采用不同的曲面拟合算法来计算基于 DEM 的等高线曲率值的区间分布有差别，但频数的分布趋势趋于一致，都在 0 值邻域内集中（图 15、图 16）。

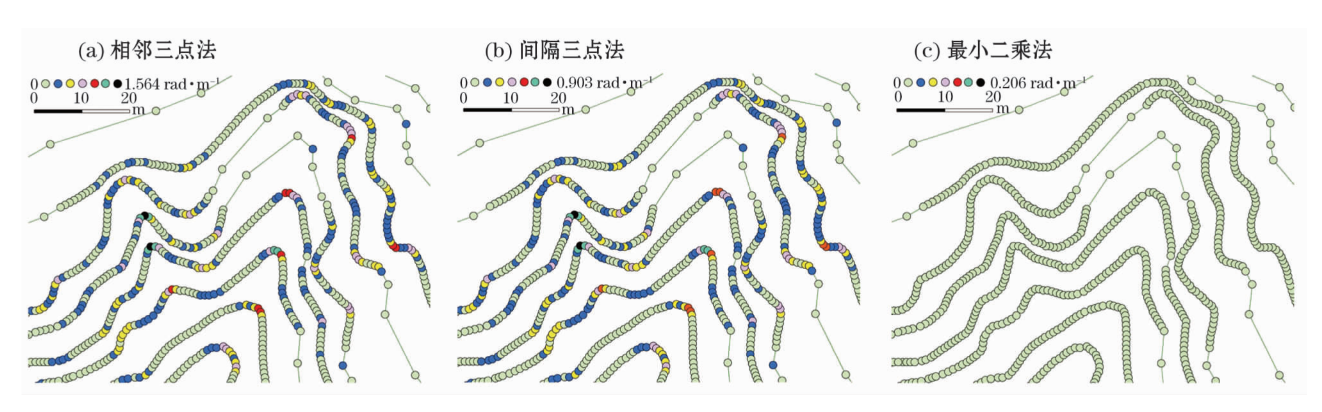


图 10 实验 1 计算的等高线曲率

Fig. 10 Contour curvature computed from experiment 1

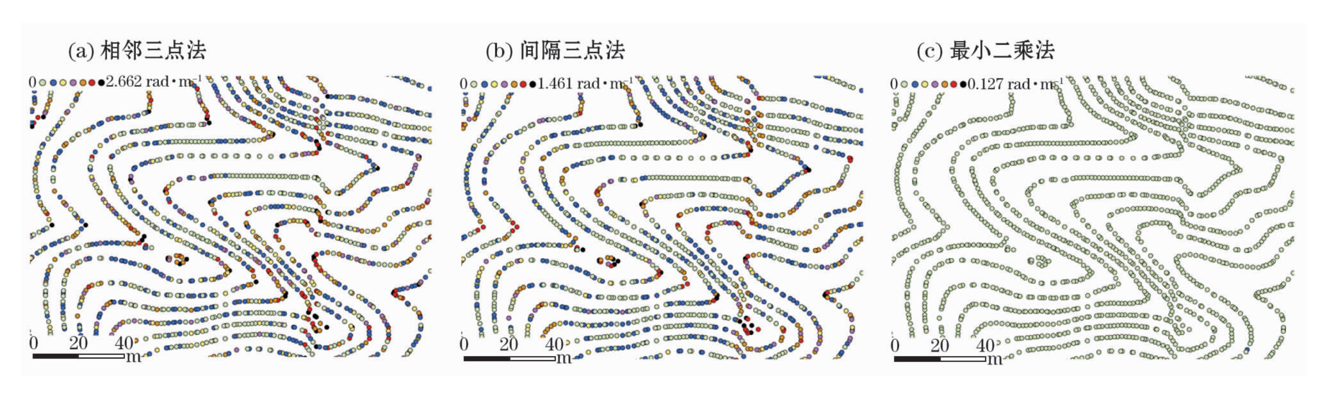


图 11 实验 2 计算的等高线曲率

Fig. 11 Contour curvature computed from experiment 2

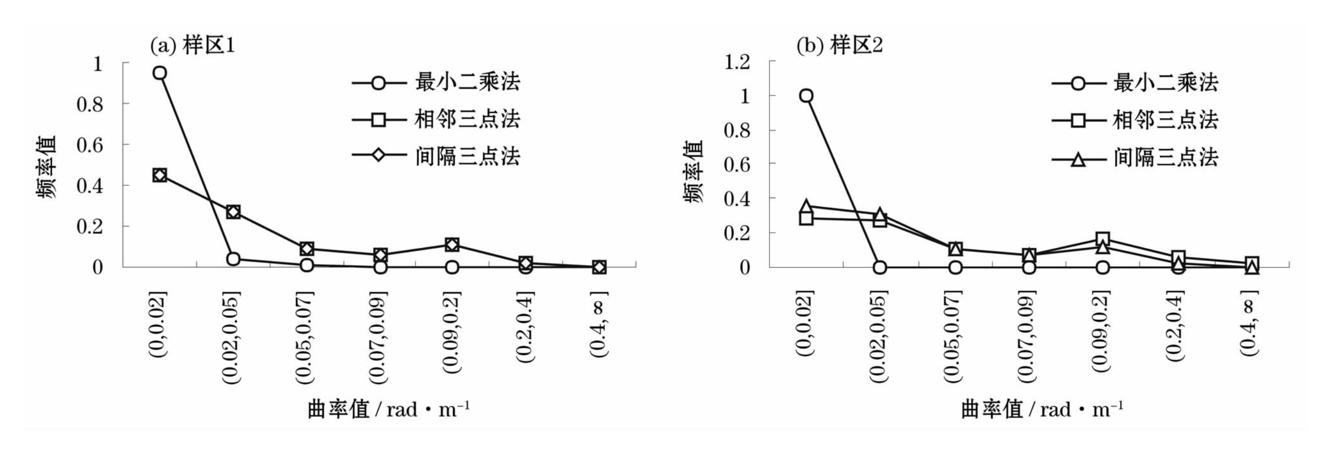


图 12 不同方法拟合等高线曲率频率曲线

Fig. 12 Frequency curve of contour curvature fitted by different methods

表 1 两样区等高线曲率统计表

Tab. 1 Contour curvature statistics for two sample areas

	方法	Min	Max	Mean	标准差 (*STD*)		方法	Min	Max	Mean	标准差 (*STD*)
样区 1	相邻三点法	0	0.903 28	0.042 836	0.057 136	样区 2	相邻三点法	0	2.662 044	0.082 330	0.135 489
	间隔三点法	0	0.903 28	0.043 663	0.057 490		间隔三点法	0	1.461 236	0.051 528	0.066 736
	最小二乘法	0	0.206 361	0.004 040	0.011 317		最小二乘法	0	0.127 311	0.000 110	0.001 513

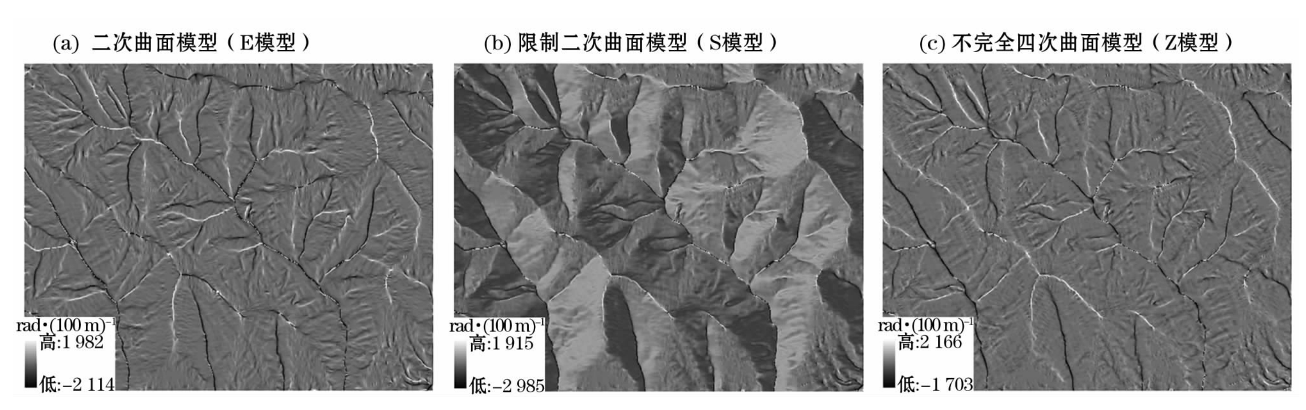


图 13　样区 1 等高线曲率计算结果

Fig. 13　Contour curvature computed from sample area 1

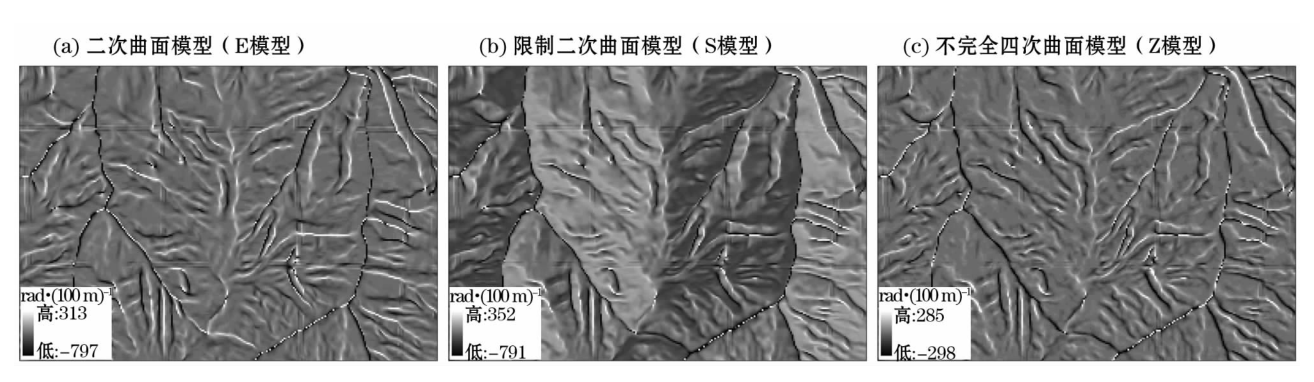


图 14　样区 2 等高线曲率计算结果

Fig. 14　Contour curvature computed from sample area 2

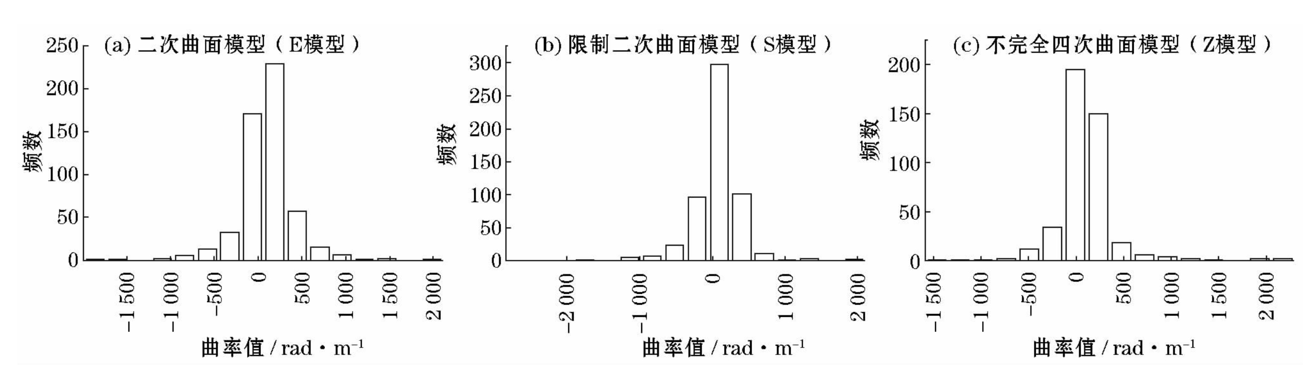


图 15　样区 1 等高线曲率频数区间分布

Fig. 15　Frequency interval distribution of contour curvature from sample area 1

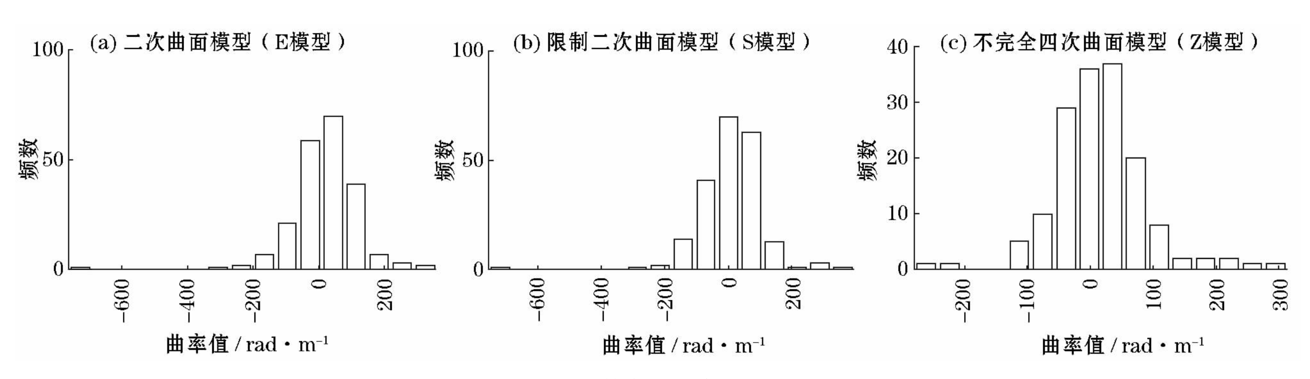


图 16　样区 2 等高线曲率频数区间分布

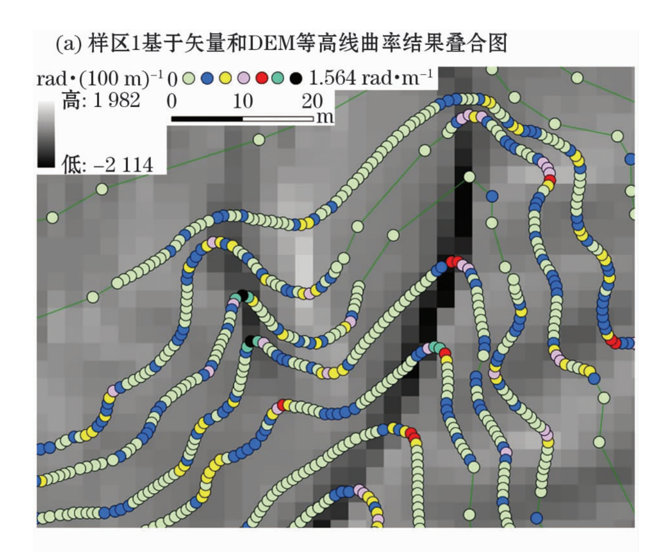
Fig. 16　Frequency interval distribution of contour curvature from sample area 2

进一步对样区 1 和样区 2 进行等高线曲率数值的统计分析可见(表 2),对于同一样区,采用 E 模型计算的结果值域和均值与 S 模型结果值差别小,但与 Z 模型计算的结果值差别大,且根据标准差 Z 模型曲率结果值更加集中。

表 2　两样区等高线曲率统计表

Tab. 2　Contour curvature statistics for two sample areas

	方法	Min	Max	Mean	STD
样区 1	E 模型	−2 114	1 982	−0.075 40	14.760 23
	S 模型	−2 985	1 915	−0.086 30	21.157 34
	Z 模型	−1 703	2 166	−0.026 85	12.347 80
样区 2	E 模型	−797	313	−17.674 528	103.776 805
	S 模型	−791	352	−28.142 857	102.319 521
	Z 模型	−298	285	−4.503 226	74.582 656



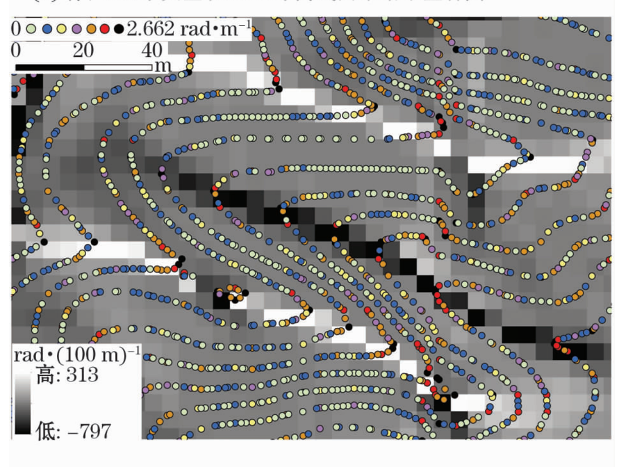


图 17　同一地区不同格式的元数据等高线曲率提取对比

Fig. 17　Comparison of contour curvature from different formats in the same region

3.5　基于矢量数据和基于 DEM 提取的等高线曲率的比较

基于相邻三点法和 E 模型计算的等高线曲率结果,对矢量数据结果和栅格 DEM 结果进行比较,选取样区 1 和样区 2 地面相对起伏较大,地形特征线附近的区域进行矢栅结果对比,结果如图 17 所示。分析图 17 以及结合图 13、14 可以看出,基于矢量数据和基于 DEM 提取的等高线曲率值在空间格局上差别不大,均能够说明等高线的弯曲变化,在地形特征线周边,等高线曲率的变化也一致;基于规则格网 DEM 计算出来的结果更加平滑细腻。

4　讨 论

本文仅对基于不同算法提取等高线曲率进行了对比分析,在基于矢量等高线数据不能区分曲率正负的情形下仍需进一步研究。本文暂提供解决思路:以图 18 所示等高线为例,A_1,B_1 和 C_1 分别表示等高线上三点,A_1 和 C_1 两点确定唯一直线,取线段 A_1C_1 中点 D_1,判断点 B_1 处高程值和点 D_1 处高程值大小,即可解决基于矢量等高线不能区分曲率正负的情形,判断依据参照公式(4)。

$E_B < E_D$,曲率取“+”(如图 18 点 B_2 和点 D_2)

$E_B > E_D$,曲率取“−”(如图 18 点 B_1 和点 D_1)　(4)

$E_B = E_D$,曲率取“0”

式中:E_B 为 B 点高程值;E_D 为 D 点高程值。

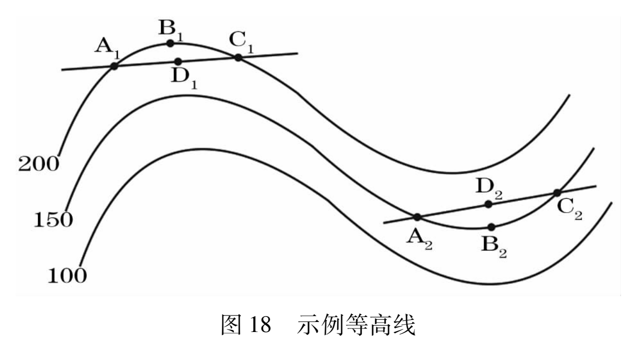


图 18　示例等高线

Fig. 18　Example contour

在后续研究中将落脚点着重放在算法实现方向,以期能达到更为理想的结果,更好的改进原有算法的不足,为确定合适 DEM 的分辨率提供重要参考。

5 结 论

本研究基于矢量等高线数据和栅格 DEM,分别利用圆拟合算法和曲面拟合模型提取等高线曲率并进行对比分析,通过设计新的基于矢量数据格式的等高线曲率计算方法,为 DEM 分辨率的确定提供科学依据,弥补因基于等高线派生的 DEM 数据计算而引起的精度损失。结论如下:

(1) 三点拟合法计算的曲率值较最小二乘法的结果大,空间分布上存在明显差异;同一种方法(三点拟合法)提取等高线曲率,选点方式不同,曲率值在空间分布上差异不明显。利用三点法计算的结果曲率值频数分布总体趋势一致,并在一定值域内集中,但最小二乘法计算的等高线曲率值高度集中于(0,0.02]的范围内。

(2) 基于规则格网 DEM 提取的等高线曲率较平滑,体现了格网数据的结构优势,进一步解释了格网数据应用广泛的原因;基于 S 模型计算的结果较基于 E 模型和 Z 模型计算的结果在空间格局上差别大,基于 E 模型的结果对地形特征的描述更好,更符合实地情形。

参考文献(References)

[1] 牟乃夏,刘文宝,王海银,等. ArcGIS10 地理信息系统教程[M]. 北京:测绘出版社,2012:360 – 361. [MOU Naixia, LIU Wenbao, WANG Haiyin, et al. ArcGIS 10 tutorial: From beginner to master[M]. Beijing: Surveying and Mapping Press, 2012: 360 – 361.]

[2] 周启鸣,刘学军. 数字地形分析[M]. 北京:科学出版社,2006: 35 – 42. [ZHOU Qiming, LIU Xuejun. Digital terrain analysis [M]. Beijing: Science Press, 2006: 35 – 42.]

[3] LIU Xuejun. On the accuracy of the algorithms for interpreting grid-based digital terrain model[D]. Wuhan: Wuhan University, 2002.

[4] FLORINSKY I V. Accuracy of local topographic variables derived from digital elevation models[J]. INT J Geographical Information Science, 1998, 12(1): 47 – 61.

[5] SCHMIDT J, EVANS I S, BRINKMAN J. Comparison of polynomial models for land surface curvature calculation[J]. Geographical Information Science, 2003, 17(8): 797 – 814.

[6] 张亮,杨勤科,兰敏. 等高线曲率计算方法研究[J]. 水土保持研究,2014,21(3):125 – 129. [ZHANG Liang, YANG Qinke, LAN Min. Study on the algorithm of contour curvature in topographic map[J]. Research of Soil and Water Conservation, 2014, 21(3): 125 – 129.]

[7] 刘学军,王叶飞,曹志东,等. 基于 DEM 的地形曲率计算模型误差分析[J]. 测绘科学,2006,(5):50 – 53,5. [LIU Xuejun, WANG Yefei, CAO Zhidong, et al. Error analysis on DEM-based terrain curvatures models[J]. Science of Surveying and Mappin, 2006, (5): 50 – 53, 5.]

[8] 同济大学数学教研室. 高等数学上册[M]. 第四版. 北京:高等教育出版社,2002:207 – 217. [The Department of Mathematics of Tongji University. Higher mathematics[M]. 4th Ed. Beijing: Higher Education Press, 2002: 207 – 217.]

[9] WILSON J P. Digital terrain modeling[J]. Geomorphology, 2012, 137(1): 107 – 121.

[10] 杨昕,汤国安,刘学军,等. 数字地形分析的理论、方法与应用[J]. 地理学报,2009,64(9):1058 – 1070. [YANG Xin, TANG Guoan, LIU Xuejun, et al. Digital terrain analysis: Theory, method and application[J]. Acta Geographica Sinica, 2009, 64(9): 1058 – 1070.]

[11] EVANS I S. Land surface derivatives: History, calculation and further development[C]// Proceedings of Geomorphometry, Nanjing, 2013: 105 – 108.

[12] SHARY P A. Land surface in gravity points classification by a complete system of curvatures[J]. Mathematical Geology, 1995, 27(3): 373 – 390.

[13] SHARY P A, SHARAYA L S, MITUSOV A V. Fundamental quantitative methods of land surface analysis[J]. Geoderma, 2002, 107(1 – 2): 1 – 32.

[14] ZEVERBERGEN L W, THORNE C R. Quantitative analysis of land surface topography[J]. Earth Surface Processes and Landforms, 1987, 12(1): 47 – 56.

Extraction and analysis of the contour curvature based on different algorithms

WANG Ning[1], YAO Zhi-hong[2]

(1 *College of Urban and Environmental Science*, *Northwest University*, *Xi'an* 710127, *Shaanxi*, *China*;

2 *College of Surveying and Geo-Informatics*, *North China University of Water Resources and Electric Power*, *Zhengzhou* 450046, *Henan*, *China*)

Abstract: Contour curvature is one of the fundamental topographic indicators that reflects the convexities in the horizontal direction of the topographical surface and expresses the divergence and confluence patterns of the motion of the surface matters. Calculating the contour curvature can measure the information conversion rate of the DEM interpolated by the vector contours, and provide a reference for setting the appropriate DEM resolution. This study based on vector contour data and DEM of Xiannangou watershed in Ansai County, Shaanxi Province, China, using the circle fitting algorithms (adjacent three-point method, interval three-point method and least square method) and surface fitting models (Evans model, Shary model and Zevenbergen model) to calculate the contour curvature respectively. The comparative analysis between the real topography of the site and the computational results indicated as follows: (1) The results from the three-point fitting method are different from the results using the least squares method, and the former describes the spatial pattern distribution of the contour curvature more accurately. (2) The frequency distribution of the results calculated by the least squares method is the highest, and the difference between the frequency curves of the two three-point fitting methods is small. (3) In the calculation results of the DEM, the results from the S-model display a larger difference than that by the E-model and the Z-model in the spatial pattern. The calculation results based on the E-model have a better effect on the contour curvature description. The difference presented by this paper when using different algorithms to calculate the contour curvature provides important reference in retrieving the contour curvature information in the practical digital terrain analysis.

Key words: digital terrain analysis; digital elevation model (DEM); contour curvature; circle fitting algorithms